101 proyectos matemáticos

Brian Bolt · David Hobbs

LABOR

46. Números y dispositivos de cálculo

En una era como la nuestra, llena de ordenadores y calculadoras, es fácil dar por supuesto que los números existieron siempre. La verdad es que la invención del sistema de numeración actual y el desarrollo de los artilugios de cómputo ha exigido muchísimo tiempo. El tema podría ser tratado como trabajo de grupo, que prepararía una serie de murales ilustrativos de su desarrollo histórico.

1. Desarrollo de la notación numérica

Las fases principales que se podrían ilustrar son:

a) La noción fundamental de número es la de correspondencia biunívoca, materializada mediante piedrecitas, dedos, nudos en cuerdas, marcas en una varilla, etc. (Hasta 1826, en Gran Bretaña los registros financieros consistían en varillas talladas.) Algunas tribus papúes siguen utilizando todavía partes de su cuerpo para contar más allá de diez.

b) Un desarrollo posterior consistió en dejar constancia de los números por medio de símbolos. Por ejemplo, hace unos 4000 años, los babilonios registraban números en tabletas de barro, grabando en ellas marcas cuneiformes (en forma de cuña) mediante una varilla. Los romanos utilizaban un sistema basado en el recuento con los dedos. El símbolo V, que denota 5, corresponde a la forma de una mano, y la X es abreviatura de dos manos.

c) El sistema posicional o de valor relativo —en el cual un mismo símbolo representa distinto valor según la posición que ocupa— fue desarrollado por los hindúes. Para apreciar sus ventajas, trata de efectuar una multiplicación con números romanos; por ejemplo, multiplica CCXLIV por XXVII.

d) La coma de decimales fue introducida por el escocés John Napier hacia 1600, pero no fue plenamente aceptada y utilizada hasta 1750, más o menos.

2. Métodos con lápiz y papel

Los mercaderes, por ejemplo, tenían necesidad de idear métodos eficaces para efectuar cómputos rápidamente. Algunos métodos de multiplicación célebres son:

a) la multiplicación «rusa» (véase *MAM,* actividad 58)
b) la multiplicación en cuadrícula
c) la multiplicación «larga» (por números de varias cifras) que rápidamente está convirtiéndose en curiosidad histórica;

y para la sustracción:

a) descomposición
b) sumas iguales
c) adición del complemento (véase *MAM,* actividad 57).

3. Artilugios

Podría hacerse una muestra de artilugios y dispositivos de cómputo, con explicación de su funcionamiento:

a) Huesos de Napier
b) Nomogramas
c) Reglas de cálculo
d) Logaritmos
e) Calculadoras mecánicas
f) Calculadoras electrónicas
g) Ordenadores

Referencias

LIFE SCIENCE LIBRARY: *Mathematics,* Time Life.
BOYER, C.: *Historia de las matemáticas,* Madrid, Alianza.
SMP: *Book G,* Cambridge University Press.
DANTZIG, T.: *Number, the Language of Science,* Allen and Unwin.
BOLT, B.: *Más actividades matemáticas,* Barcelona, Labor, 1988.

47. La historia del número π

El estudio de la historia de las matemáticas pone de manifiesto que las matemáticas son una actividad humana que se ha desarrollado durante un largo período de tiempo. La historia del número simbolizado por π nos proporciona una tal oportunidad a nivel accesible.

1. La circunferencia de un círculo

¿Qué relación existe entre la circunferencia o perímetro de un objeto circular y su diámetro? Se podría medir la circunferencia y el diámetro de diversos objetos circulares y mostrar los resultados gráficamente. Debería estar claro que la circunferencia es «3 y poquito» veces el diámetro.

Una consulta a I Reyes 7:23 hace pensar que en aquellos tiempos, los hebreos creían que el factor multiplicador era 3.

2. Aproximaciones de π

Según el Papiro Rhind, los egipcios tomaban para π el valor 256/81. Herón de Alejandría (75 d. de C.) usaba $3^{1/7}$. Ptolomeo (150 d. de C.) utilizaba $3^{17/120}$, que escribía $3°8'30''$, lo que significa $3 + 8/60 + 30/3600$, pues utilizaba en realidad un sistema de base 60.

Los hindúes y los chinos disponían también de algunas buenas aproximaciones:
$49/16$, $\sqrt{10}$, $355/113$.

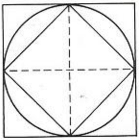
El siguiente programita (adaptado de uno publicado en *The Mathematical Gazette,* diciembre de 1983) da aproximaciones racionales de π:

```
10 N = 0 : E = 1 : PI = 4* ATN(1)
20 N = N + 1 : M = INT(N*PI + 0.5)
30 F = ABS(M/N − PI)
40 IF F >= E THEN 20
50 E = F : PRINT M;"/";N : GOTO 20
```

El programa da cierto número de aproximaciones que convergen muy rápidamente hacia 355/113. Se produce después una pausa larga (de unos cinco minutos) antes de que sean impresas las aproximaciones siguientes.

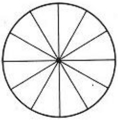
3. Área

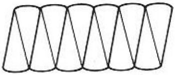
Dibujando un cuadrado inscrito de un círculo y otro exinscrito, es fácil demostrar que el área de un círculo de radio r está comprendida entre $2r^2$ y $4r^2$.



Este método fue generalizado por Arquímedes, quien estudió el área límite de los polígonos inscritos y circunscritos. Pueden verse detalles en HOGBEN: *Mathematics for the Million.*

Por descomposición en sectores seguida de un paso al límite es fácil obtener la fórmula πr^2 dando por sabido que la circunferencia del círculo tiene longitud $2\pi r$.





4. Series

El número simbolizado por π aparece en muchas situaciones sin aparente relación con los círculos, y puede ser obtenido mediante diversas series:

$$a)\ \frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

$$b)\ \frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

$$c)\ \frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\dots$$

$$d)\ \frac{\pi^8}{9450}=\frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\dots$$

La primera de estas series converge muy lentamente; la cuarta, con extraordinaria rapidez.

Wallis (1656) obtuvo el producto

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\dots$$

Es posible preparar programas breves de ordenador para obtener aproximaciones de π a partir de estas series.

Han sido calculados muchos miles de cifras decimales de π por medio de ordenadores. Los matemáticos están interesados en detectar regularidades en estas cifras.

Referencias

HOGBEN, L.: *Mathematics for the Million*, Pan.
SMP: *Book E Teacher's Guide*, Cambridge University Press.
BOLT, B.: *Más actividades matemáticas*, Barcelona, Labor, 1988.
COURANT, R. y H. ROBBINS: *¿Qué es la matemática?*, Madrid, Aguilar.
BOYER, C.: *Historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza.

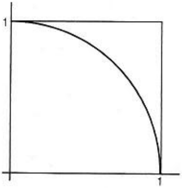
5. Métodos probabilísticos

a) *La aguja de Buffon.* Buffon (1777) demostró que cuando se lanza una aguja de longitud l sobre una colección de rectas paralelas separadas por una anchura d, la probabilidad de que la aguja «pise» a una recta es $\frac{2l}{\pi d}$.

Repitiendo el experimento un gran número de veces se podría obtener una aproximación de π. Es conveniente tomar l en torno a $3d/4$, para que la probabilidad se encuentre alrededor de 1/2.

b) *El método de Montecarlo.* Se elige al azar un punto de un cuadrado. La probabilidad de que se encuentre en el cuadrante del círculo es

$$\frac{\text{área del cuadrante}}{\text{área del cuadrado}}=\frac{\pi}{4}$$

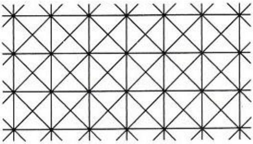


Puede prepararse un programa de ordenador para hallar aproximaciones de π por este método. Es necesario engendrar al azar dos decimales, x e y, ambos comprendidos entre 0 y 1, averiguar si el punto determinado por ellos se halla en el cuadrante (mediante la condición $x^2 + y^2 < 1$); y repetir muchas veces. El tanto por ciento de puntos que caen en el cuadrante es aproximadamente igual a $\pi/4$.

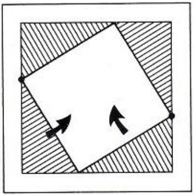
48. El teorema de Pitágoras

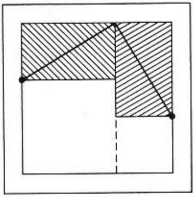
Normalmente, el teorema de Pitágoras se aplica para calcular la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, conocidas las de los otros dos. En su forma original, el teorema aludía a las áreas de ciertos cuadrados. La construcción de modelos encaminados a poner de manifiesto esta propiedad de las áreas da pie a un proyecto interesante. Se podría hacer una exposición mural de las diversas demostraciones.

1. Se ven frecuentemente casos particulares del teorema de Pitágoras en tejidos, motivos de empapelado, azulejos, etc. Reúne ejemplos.



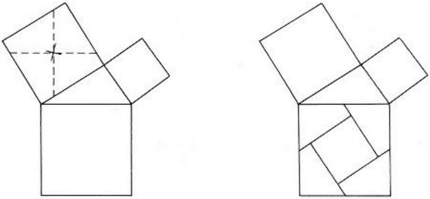
2. El método siguiente es atribuido al matemático hindú Bhaskara (hacia 1150 d. de C.). Según él, no es necesaria explicación alguna, y se limitó a escribir «¡Mira!» bajo la figura.



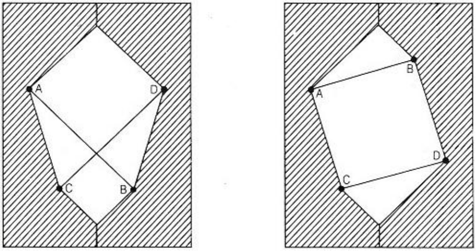


Se puede construir un modelo de corcho (como el utilizado en los tablones de anuncios), cartulina de color y alfileres.

3. Otra disección muy conocida se debe a Perigal. (Véase *AM*, actividad 27.) El cuadrado mediano se escinde en cuatro piezas, hallando primero su centro (por intersección de las diagonales) y trazando después por él una paralela y una perpendicular a la hipotenusa del triángulo.



4. También se puede dar una atractiva demostración con dos piezas de cartón fuerte. Primero se unen A con B y C con D mediante una goma o cinta elástica. Las piezas se sostienen una en cada mano; después, se le da la vuelta a la pieza de la derecha, dando la posición que vemos en el segundo diagrama.



5. Puede verse una variedad de otras demostraciones del teorema de Pitágoras en *AMAM*, actividad 60.

Referencias

SMP: *Book E*, Cambridge University Press.
BOLT, B.: *Actividades matemáticas (AM)* y *Aún más actividades matemáticas (AMAM)*, Barcelona, Labor.

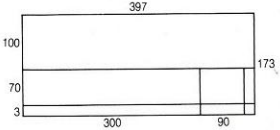
49. Calculistas prodigiosos

Algunas personas tienen una notable facilidad para efectuar mental y muy rápidamente cálculos complicados. Aunque en la era de las calculadoras electrónicas esta destreza no resulte especialmente útil, la verdad es que sigue resultando fascinante, y seguramente habrá alumnos interesados en conocer los métodos de que se valen estos prodigios, así como en aprender para sí algunas técnicas.

1. Algunos calculistas humanos muy rápidos

Un célebre calculista «relámpago» fue el inglés George Bidder, nacido en 1806 en Moretonhampstead, Devon. Siendo niño, su padre le llevó por todo el país, dando exhibiciones de su formidable capacidad de cálculo mental. Aunque el padre ganaba mucho dinero con las exhibiciones de su hijo, se dejó finalmente persuadir para que George fuera a la universidad. George se hizo ingeniero; proyectó diversos ferrocarriles y los Victoria Docks, en Londres.

George era capaz de traducir los números a figuras. Por ejemplo, el número 984 era visualizado como una formación rectangular de puntos, 24 hileras de 41 puntos. Para hallar 173 × 397 imaginaba una figura como la siguiente:



Entonces efectuaba

100 × 397 = 39 700	
70 × 300 = 21 000	60 700
70 × 90 = 6 300	67 000
70 × 7 = 490	67 490
3 × 300 = 900	68 390
3 × 90 = 270	68 660
3 × 7 = 21	68 681

En 1978, la india Shakuntala Devi fue presentada en un programa de televisión de la BBC, y efectuó en un par de segundos operaciones como

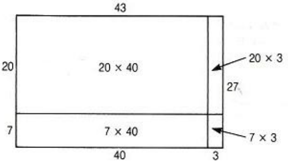
multiplicar 637 432 por 513 124
o hallar la raíz cúbica de 71 991 296

2. Para calcular rápidamente

He aquí algunos métodos fáciles de aplicar para efectuar cálculos rápidos.

a) El método de multiplicación de George Bidder se aplica sin dificultad al producto de números de dos cifras.

Por ejemplo, para efectuar 27×43, imaginémoslo como la superficie de un suelo que mide 27 m por 43 m. Las áreas de los cuatro rectángulos se pueden sumar mentalmente.



b) Un método rápido para elevar al cuadrado un número de dos dígitos con un 5 en las unidades es sumar un 1 al dígito de las decenas, multiplicar el resultado por el dígito de las decenas y escribir a su derecha 25.

Ejemplo, $75^2 \rightarrow 8 \times 7 = 56 \rightarrow 5625$

c) Un método rápido para multiplicar por 11 consiste en escribir la cifra de las unidades, sumar después la cifra de las unidades a la de las decenas, la de las decenas a la de las centenas y así sucesivamente, concluyendo con el dígito situado más a la izquierda.

Por ejemplo, 152×11

Escribimos las unidades	2
2 más 5 son 7	72
5 más 1 son 6	672
Se escribe la última cifra	1672

d) Aprendiendo de memoria los cubos de los números de 1 a 10 se pueden hallar las raíces cúbicas de números.

Número	1	2	3	4	5	6
Cubo	1	8	27	64	125	216
Número	7	8	9	10		
Cubo	343	512	729	1000		

Pidámosle a un compañero que piense secretamente un número de 1 a 100 y que lo eleve al cubo.

Supongamos que el resultado sea 571 787. La cifra de las unidades es 7. Al leer desde el cubo hacia el número vemos que el número elegido tuvo que terminar en 3.

Despreciemos las tres últimas cifras y fijémonos en el 571. Está comprendido entre los cubos de 8 y de 9. Por consiguiente, el número pensado tuvo que ser 83.

e) Explica estos métodos rápidos e idea por tu cuenta algunos más. Por ejemplo, hallar métodos rápidos para calcular 462×50, 360×125, $2125{:}25$.

Referencias

ROUSE BALL, W. W.: *Mathematical Recreations and Essays*, Macmillan.
GARDNER, M.: *Carnaval matemático*, Madrid, Alianza.
The Trachtenburg Speed System, Pan.
BLUE PETER: *Fourteenth Annual*, BBC.